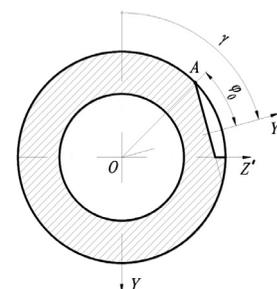


# Tensiones en ejes huecos con una grieta superficial bajo flexión rotativa



## STRESSES IN HOLLOW AXIS WITH A SURFACE CRACK UNDER ROTATION AND BENDING

DOI: <http://dx.doi.org/10.6036/5822> | Recibido: 26/04/2013 • Aceptado: 07/10/2013

Jon Ariza De Miguel, Serguei S. Gutyrva, Yuri M. Jomyak

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA NACIONAL DE ODESA. Dpto. de Ciencias de Maquinaria. Avda. Shevchenko, 1 - Odesa (Ucrania). jonarizademiguel@gmail.com

### ABSTRACT

- Hollow axis are widely used in all branches of industry and bear great responsibility. Their behaviour under fatigue being nonetheless well known, and the crack growth phenomenon extensively studied, the understanding of the physical phenomenon somewhat lacks theoretical backing. Moreover, it is still to be explained why hollow axis behave, under fatigue, differently to whole ones. The present paper gives a start to the theoretical study of the stresses in a hollow axis in flexural mode, considering the variations of its strength moment and its nominal tractive efforts, showing that these endure oscillations harsher than those usually attributed to these cases.
- Keywords: fatigue, hollow axis, cracks, bending and rotation, analytical study.

### RESUMEN

Los ejes huecos tienen amplia aplicación en todas las ramas de la industria y son piezas de gran responsabilidad. No obstante, aun siendo extensamente conocido su comportamiento a fatiga y ampliamente estudiado el fenómeno del crecimiento de grieta en ellos, la comprensión del fenómeno empírico adolece aún de un refrendo teórico. Así mismo, queda por explicar el porqué del comportamiento diferente a fatiga de los ejes huecos frente a los llenos. El presente artículo trata de comenzar el estudio teórico del estado tensional de un eje que trabaje a flexión, considerando las variaciones del momento resistente del eje y de las tensiones axiales nominales del mismo; demostrándose que sufren oscilaciones mayores de las habitualmente atribuidas a estos casos.

**Palabras clave:** fatiga, ejes huecos, grietas, flexión rotativa, estudio analítico.

### 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de ejes y árboles tanto sólidos como huecos es una materia ampliamente estudiada tanto por la profusión de este elemento mecánico como por la facilidad que ofrece a la hora de realizar estudios analíticos y experimentales. Así, puede decirse que sea uno de los elementos mecánicos que en la práctica menos se presten a requerir ensayos a fatiga, salvo en casos excepcionales de solicitaciones o configuraciones inhabituales.

En el caso del cálculo a fatiga de un eje que trabaje netamente a flexión, y más precisamente en el estudio del crecimiento de grietas durante su vida útil, existe cierta cantidad de métodos analíticos que, a la hora de calcular las tensiones en el eje, hacen uso de los habituales valores tabulados del momentos de inercia y por ende del momento resistente de la sección originaria. Estos métodos prácticos incluyen normas industriales de uso muy extendido pese a su carácter netamente conservador [1].

Los ejes llenos cuentan así pues con abundante bibliografía, así como los huecos, pero aún no se ha hallado explicación plausible que aclare por qué ambos se comportan de diferente manera, fenómeno que se observa sin embargo experimentalmente. Es fácil observar que la presencia de una grieta en la superficie de un eje reduce el área real del mismo y por tanto aumenta las tensiones medias en él, pero lo hace en valores despreciables mientras que la grieta sea pequeña, y considerables a medida que ésta crezca. Este efecto será así mismo mayor en el caso de ejes huecos, por ser menor el área transversal originaria del eje.

El efecto producido por despreciar este hecho una vez que la grieta aumenta es objeto de estudio en este artículo, así como las posibles consecuencias que pueda tener en ulteriores cálculos.

## 2. MATERIALES Y METODOS

### 2.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese un eje hueco de diámetro exterior  $D$  y diámetro interior  $d$ , con un ratio entre ambos  $k_h$ .

$$k_h = d/D$$

El momento de inercia [ $\text{mm}^4$ ] respecto a los ejes  $OY'$  y  $OZ'$  de la sección es, como es bien sabido:

$$I_{Y0} = I_{Z0} = \frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot (1 - k_h^4)$$

y el momento resistente a la flexión [ $\text{mm}^3$ ]:

$$W_{Z0} = \frac{I_{Z0}}{y_{max}} = \frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot (1 - k_h^4)$$

Los subíndices *cerro* indican en adelante los valores correspondientes a la sección original, sin grieta alguna.

No obstante, como se ha dicho, consideramos la presencia de una grieta recta como la de la Fig.1, donde definimos el semiángulo de la misma  $\varphi_0$  y el ángulo  $\gamma$  de giro del eje respecto a su posición arbitraria inicial, que será aquella en que el eje medio de la grieta se halle en su posición superior. La asunción de la grieta plana como válida para cálculos aproximados viene dada por su presencia en la literatura [2], y por tanto se ha de considerar que los valores aquí obtenidos serán sensiblemente menores a los que se presentarían en el caso de tener la grieta forma lenticular.

La presencia de la grieta y la consideración de su superficie como área que se subtrae al área efectiva de la sección en los momentos en que ésta ha de transmitir esfuerzos de tracción, conlleva lógicamente un área real menor que la inicial, lo cual también repercute en el valor del momento de inercia. El valor del momento resistente también se verá modificado, tan-

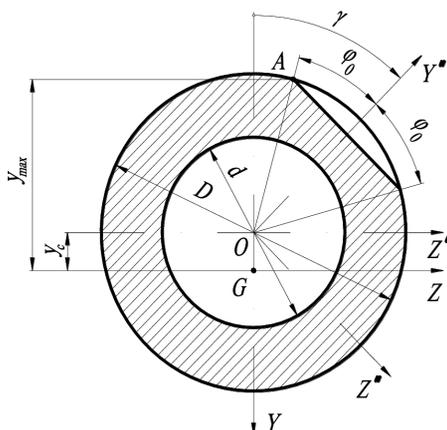


Fig. 1: Grieta abierta, identificación de las variables

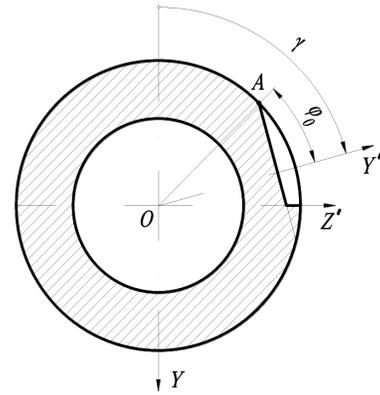


Fig. 2: Grieta parcialmente cerrada

to por variar el momento de inercia citado, como por hacerlo también la posición del centro de gravedad de la sección, que se ve desplazado hacia el lado opuesto al que se halle la grieta.

La grieta se cerrará cuando se halle en la zona en que los esfuerzos transmitidos sean de compresión, por lo que durante la rotación de la pieza se pueden considerar tres casos:

1. La grieta se halla enteramente en la zona de tracción y por tanto toda su área deja de transmitir esfuerzos. A esta situación se le dará el subíndice 1 (Fig.1).
2. Parte de la grieta se halla en la zona de compresión, y por tanto tan sólo el área aún en la zona de tracción deja de transmitir esfuerzos. A esta situación se le dará el subíndice 2 (Fig.2).
3. La grieta se halla enteramente en la zona de compresión, y por tanto no influye sobre los valores de los momentos de inercia, y por ende de las tensiones. A esta situación se le dará el subíndice 3.

Se asume la simplificación de que una parte de la grieta pasa de estar “abierta” a estar “cerrada” en el momento en que rebasa el eje  $OZ$ , mecanismo aceptado en la literatura en general [3, 4], a sabiendas de que frecuentemente lo haga ligeramente antes [5, 6], dejando para ulteriores refinamientos esta consideración.

Estos casos están delimitados por los valores que tomen el semiángulo de grieta  $\varphi_0$  y el ángulo de giro  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \text{Caso 1} \equiv \gamma \in [0, \pi/2 - \varphi_0] \\ \text{Caso 2} \equiv \gamma \in [\pi/2 - \varphi_0, \pi/2 + \varphi_0] \\ \text{Caso 3} \equiv \gamma \in [\pi/2 + \varphi_0, \pi] \end{cases}$$

Para valores entre  $\pi$  y  $2\pi$  se considerarán los valores simétricos a los obtenidos. El cálculo del momento de inercia de las secciones expresadas en las fases ahora definidas requiere cálculos analíticos independientes, dado que la literatura no aporta los valores para los momentos de inercia de este tipo de secciones.

## 2.2. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LA SECCIÓN

### 2.2.1. Caso 1: Grieta totalmente abierta

La Fig.1 muestra una grieta con ejes relativos  $OY''$  y  $OZ''$ , girados un ángulo  $\gamma$  respecto a los principales. Se puede de-

mostrar que los valores de los momentos de inercia de la sección son, respecto a estos ejes, restada la grieta:

$$\begin{cases} I_{Y''|1} = D^4/64 [\pi(1 - k_h^4) - \varphi_0 + 1/2 \sin 2\varphi_0 - 1/12 \sin 4\varphi_0] \\ I_{Z''|1} = D^4/64 [\pi(1 - k_h^4) - \varphi_0 + 1/4 \sin 4\varphi_0] \end{cases}$$

Y los valores adimensionales respecto a la sección original en ausencia de grieta:

$$\begin{cases} \bar{I}_{Y''|1} = \frac{I_{Y''|1}}{I_{Y0}} = \frac{\pi(1 - k_h^4) - \varphi_0 + 1/2 \sin 2\varphi_0 - 1/12 \sin 4\varphi_0}{\pi(1 - k_h^4)} \\ \bar{I}_{Z''|1} = \frac{I_{Z''|1}}{I_{Z0}} = \frac{\pi(1 - k_h^4) - \varphi_0 + 1/4 \sin 4\varphi_0}{\pi(1 - k_h^4)} \end{cases}$$

De donde se puede obtener que:

$$\bar{I}_{Z'|1} = \sqrt{(\bar{I}_{Z''|1} \cos \gamma)^2 + (\bar{I}_{Y''|1} \sin \gamma)^2}$$

Para el valor real del momento de inercia se ha de desplazar el centro de gravedad de la sección de acuerdo con el teorema de Steiner, y para ello ha de saberse la posición del centro de gravedad, que se puede obtener calculando el valor de su momento estático [mm<sup>3</sup>]:

$$S_{Z'|1} = -\frac{D^3}{12} (\sin \varphi_0)^3 \cos \gamma$$

La razón del área respecto al área original –área adimensional- del eje es:

$$\bar{A}|_1 = \frac{A|_1}{A_0} = \frac{\pi(1 - k_h^2) - \varphi_0 + 1/2 \sin 2\varphi_0}{\pi(1 - k_h^2)}$$

### 2.2.2. Caso 2: Grieta parcialmente cerrada

El momento adimensional de inercia del área en la Fig.2, que representa la grieta parcialmente cerrada en los valores positivos del eje OZ es igual a:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{Z'|2} = \frac{I_{Z'|2}}{I_{Z0}} = & \frac{1}{(1 - k_h^4)} \left\{ \frac{3}{4} - k_h^4 + \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma - \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2(\gamma - \varphi_0) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{3\pi} \frac{\cos \varphi_0}{\sin \gamma} (\cos(\gamma - \varphi_0))^3 \right\} \end{aligned}$$

Su momento estático:

$$S_{Z'|2} = \frac{D^3}{24} \left[ 1 + \sin(\varphi_0 - \gamma) - \cos \varphi_0 \frac{(\cos(\varphi_0 - \gamma))^2}{2 \sin \gamma} \right]$$

Y el área:

$$\bar{A}|_2 = \frac{A|_2}{A_0} = \frac{3\pi/2 + \gamma - \varphi_0 - (\cos \varphi_0)^2 (\tan \varphi_0 + \cot \gamma)}{2\pi(1 - k_h^2)}$$

### 2.2.3. Caso 3: Grieta cerrada

El tercer caso es aquel en que toda la región afectada por la grieta se halla en la zona de la sección en que los esfuerzos nominales son de compresión, por lo que, hallándose la grieta “cerrada”, los valores de sección, momento estático y momento de inercia son los correspondientes a la sección original.

## 2.3. CÁLCULO DE LAS TENSIONES NOMINALES

Contando ya con los valores del momento de inercia y área, puede deducirse para cada caso el valor de la posición real del centro de gravedad de la sección, así como el momento de inercia respecto a este nuevo punto de acuerdo con Steiner:

$$I_{Z|i} = I_{Z''|i} - A|i \cdot (y_{c|i})^2 = I_{Z''|i} - (S_{Z''|i})^2/A|i$$

Ya que

$$S_{Z''|i} = A|i \cdot y_{c|i} \text{ para cada } i = 1, 2, 3$$

Y por tanto, el momento resistente adimensional respecto al nuevo punto será:

$$\bar{W} = W|i/W_{Z0}$$

donde

$$W|i = I_{Z|i}/y_{max|i}$$

y donde el valor de  $y_{max}$  será diferente en cada uno de los casos, así, de las Fig. 1 y 2 se deduce:

$$y_{max|i} = \begin{cases} \begin{cases} D/2 \cdot \cos(\varphi_0 - \gamma) + y_{c|i} & \gamma < \varphi_0 \\ D/2 + y_{c|i} & \gamma > \varphi_0 \end{cases} & : i = 1, 2 \text{ (casos 1 y 2)} \\ D/2 & : i = 3 \text{ (caso 3)} \end{cases}$$

Por ser un punto de interés en el estudio del crecimiento de la grieta, se ha calculado también la tensión nominal adimensional para el punto A, que indica cuánto mayor es la tensión en este punto de acuerdo con el modelo aquí presentado, respecto a ese mismo punto en el caso de que no hubiera grieta alguna. La expresión alcanza esta forma:

$$\bar{\sigma}(\gamma, \varphi_0)|_A = \frac{\sigma_x|_A}{\sigma_x|_{A0}} = \frac{I_{Z0}}{I_{Z|i}} \cdot \left( 1 + \frac{2y_{c|i}}{D \cdot \cos(\gamma - \varphi_0)} \right)$$

## 3. RESULTADOS

Partiendo de las ecuaciones obtenidas, puede representarse gráficamente la evolución de los diversos parámetros analizados. Se ha tomado un valor de  $kh=0,75$  habitual en la práctica [7, 8]. Para el ángulo  $\varphi_0$  se han considerado los valores 20° y 30°. La Fig.3 muestra los valores del momento de inercia adimensional antes ( $I_{Z''|i}$ ) y después ( $I_{Z|i}$ ) de considerar el desplazamiento del centro de gravedad de la sección. La Fig.4

muestra por una parte el valor de  $\sigma(\varphi_0)$  antes descrito para el punto A, alcanzándose un valor del 6% con  $\varphi_0=30^\circ$ ; y por otra parte la razón entre el momento resistente de la sección que hemos calculado y el momento de la sección original, para el eje en su totalidad.

#### 4. CONCLUSIONES

1. Observando las gráficas obtenidas de las ecuaciones analíticas presentadas se puede confirmar que no es desdeñable la influencia del área “perdida” de la grieta a la hora de calcular el estado tensional de puntos ya próximos a ella, ya de la superficie del eje en general. Sí es cierto que el efecto que el desplazamiento del centro de gravedad de la sección por la presencia de una grieta es tal vez menor del esperado (1%, Fig.3, a y b; c y d), y por ende probablemente despreciable; pero conjuntamente con la variación del valor del momento de inercia, que alcanza un 15%, sí puede ser de interés en estudios posteriores.

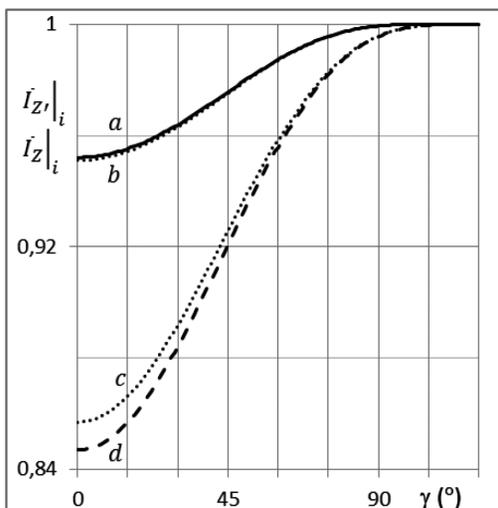


Fig. 3: a)  $\bar{I}_{z_i}(\varphi_0 = 20^\circ)$  b)  $\bar{I}_{z_i}(\varphi_0 = 20^\circ)$  c)  $\bar{I}_{z_i}(\varphi_0 = 30^\circ)$  d)  $\bar{I}_{z_i}(\varphi_0 = 30^\circ)$

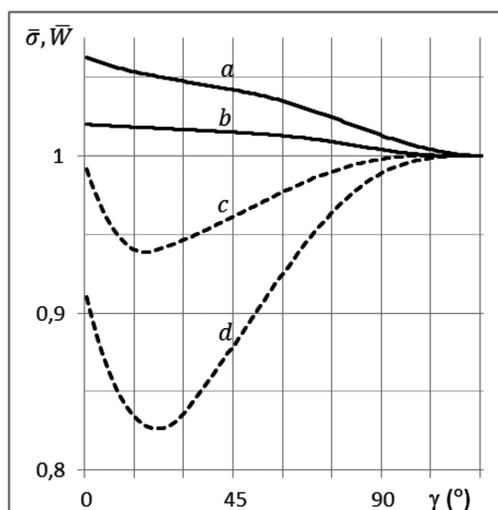


Fig. 4: a)  $\bar{\sigma}(\varphi_0 = 30^\circ)$  b)  $\bar{\sigma}(\varphi_0 = 20^\circ)$  c)  $\bar{W}(\varphi_0 = 20^\circ)$  d)  $\bar{W}(\varphi_0 = 30^\circ)$

2. El hecho de que el momento resistente de la sección oscile durante la rotación del eje, disminuyendo hasta un 17,5% en su máximo en nuestro ejemplo (Fig.4, d), conlleva que todos los puntos de la sección se hallen trabajando también sometidos a estas oscilaciones, y por ende sus tensiones no sólo no seguirán un patrón sinusoidal como sucedería en una pieza cilíndrica, sino que además, en función de su posición perimetral respecto a la grieta, tendrán un valor medio no nulo a considerar en el cálculo a fatiga de la pieza, dado que el eje pasará a presentar un cuadro de sollicitaciones que no responde a la flexión pura, sino a la flexión con tracción.
3. En lo que se refiere al punto A estas oscilaciones alcanzan el 5% (Fig.4) en su máximo, y por ser una zona crítica en el estudio del crecimiento de la grieta, es un efecto a considerar en los cálculos analíticos del fenómeno de fatiga dado que esa mayoración será notada en las tensiones reales de esos puntos del frente de grieta.
4. Como se ha dicho antes, en el caso de que la grieta fuera lenticular o elíptica tal y como sugiere la bibliografía [2] su área casi se duplicaría, y aumentarían por tanto los valores de los demás parámetros, cálculo que se prevé realizar en el futuro.
5. Como parte de un mayor y necesario estudio analítico de las grietas en la superficie de ejes huecos, con miras a una optimización del diseño en lo que a dimensionamiento y cálculo de vida se refiere, el presente artículo proporciona por una parte la base del estudio tensional teórico de las mismas, y también ecuaciones no integradas en la bibliografía general de resistencia de materiales, o de fatiga.
6. Se abren así nuevas vías de investigación, y por ende de obtención de métodos prácticos de cálculo de ejes huecos, incluso en el ámbito del cálculo de crecimiento de grietas.

#### BIBLIOGRAFÍA

- [1] DIN. Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen. 743-1. Berlín: Beuth Verlag GmbH, 2000.
- [2] Madia M, Beretta S, Schödel M, et al. "Stress Intensity Factor Solutions for Cracks in Railway Axles". Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78-5 p.782 (doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.03.019>)
- [3] Финкель ВМ. Физические основы торможения разрушения. Moscú: Металлургия, 1977.
- [4] Zerbst U, Beretta S, Köhler G, et al. "Safe life and damage tolerance aspects of railway axles- A review". Engineering Fracture Mechanics. En prensa. p. 46-50 (doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.09.029>)
- [5] Avilés R. Análisis de fatiga en máquinas. Madrid: Paraninfo, 2005. 464p. ISBN: 8497323440
- [6] Stephens RI, Fatemi A, Stephens RR, et al. Metal Fatigue in Engineering. Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. p.162-165 ISBN: 0-471-51059-9
- [7] Школьник ЛМ, Коваленко ЮЕ, Мартынов НИ, et al. Полье оси и валы. Moscú: Машиностроение, 1968. p. 114 y ss.
- [8] Гутырва СС, Хомяк ЮМ, АН Колеущенко. "Оболочечная модель трубчатого вала для исследования напряжений в соединениях с натягом". Вісник Східноукр. Нац. Унів. ім. Володимира Даля. Lugansk. 2003, №11(69) p.199.