

ANÁLISIS COMBINATORIO

Autor: Jerónimo Roure

En el último número de DYNA proponíamos a los lectores el problema planteado en 1933:

“Consideremos un rectángulo reticulado como el de la figura y debemos calcular el número de caminos diferentes por los que se puede ir del vértice A al vértice D sin retroceso”. Encontrar una solución para cualquier número de mallas.

ANÁLISIS COMBINATORIO

POR D. JERÓNIMO ROURE—INGENIERO DE MINAS

Consideremos un rectángulo reticulado como el de la figura 1 y vamos a calcular el número de caminos diferentes por los que se puede ir del vértice A al vértice D, sin retroceso. Este problema se puede aplicar en la obtención de la serie de Taylor.

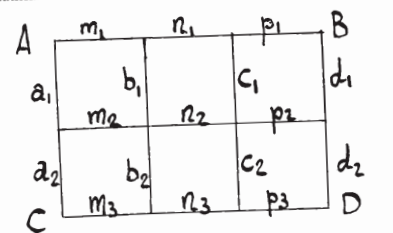


Fig. 1

Si a cada una de las barras del retículo las notamos conforme se indica en la figura, los caminos indicados son, siguiendo en las barras preferiblemente las superiores y de la derecha:

$m_1 n_1 p_1 d_1 d_2$
 $m_1 n_1 c_1 p_2 d_2$
 $m_1 n_1 c_1 c_2 p_3$
 $m_1 b_1 n_2 p_2 d_2$
 $m_1 b_1 n_2 c_2 p_3$

$m_1 b_1 b_2 n_3 p_3$
 $a_1 m_2 n_2 p_2 d_2$
 $a_1 m_2 n_2 c_2 p_3$
 $a_1 m_2 b_2 n_3 p_3$
 $a_1 a_2 m_3 n_3 p_3$

Se comprende que si sólo tenemos en cuenta las barras verticales podamos obtener el mismo número de combinaciones y así es en efecto pues son desglosándolas de las anteriores:

$d_1 d_2$ $c_1 c_2$ $b_1 c_2$ $a_1 d_2$ $a_1 b_2$
 $c_1 d_2$ $b_1 d_2$ $b_1 b_2$ $a_1 c_2$ $a_1 a_2$

que son las mismas que obtenemos combinando cada barra vertical de índice 1 con todas las de índice 2 que están debajo o a su derecha o sea:

$a_1 a_2$ $a_1 c_2$ $b_1 b_2$ $b_1 d_2$ $c_1 d_2$ (β)
 $a_1 b_2$ $a_1 d_2$ $b_1 c_2$ $c_1 c_2$ $d_1 d_2$

dando la a_1 cuatro combinaciones, la b_1 tres, la c_1 dos y la d_1 una.

Si ahora nosotros en lugar de esta notación usamos la indicada en la figura 2 en la que la letra indica el lugar en el camino a partir del vértice A y

270

DYNA

N.º 92. Agosto, 1933

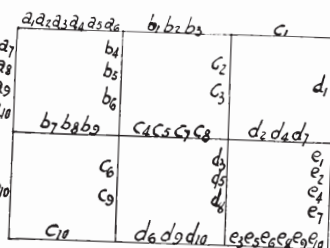


Fig. 2

el índice el número del camino según el orden de la relación (α) tendremos la relación:

$a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ $a_6 b_6 c_6 d_6 e_6$
 $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2$ $a_7 b_7 c_7 d_7 e_7$
 $a_3 b_3 c_3 d_3 e_3$ $a_8 b_8 c_8 d_8 e_8$ (α')
 $a_4 b_4 c_4 d_4 e_4$ $a_9 b_9 c_9 d_9 e_9$
 $a_5 b_5 c_5 d_5 e_5$ $a_{10} b_{10} c_{10} d_{10} e_{10}$

La relación (β) se transformará en:

$a_{10} b_{10}$ $a_6 d_6$ $b_6 c_6$ $b_1 c_1$ $c_2 e_2$ (β')
 $a_9 c_9$ $a_7 e_7$ $b_2 d_5$ $c_3 d_3$ $d_1 e_1$

quitando los subíndices que no indican más que el

orden seguido para la obtención de los diversos caminos quedan las combinaciones:

$a b$ $a d$ $b c$ $b e$ $c e$
 $a c$ $a e$ $b d$ $c d$ $d e$

es decir, las combinaciones que se pueden hacer con 5 letras a b c d e tomadas dos a dos, o sea lo que ordinariamente se nota C_5^2 .

Este resultado es el que debíamos obtener puesto que las barras verticales están dispuestas así:

$a b c d$
 $b c d e$

y si con objeto de distinguir las de la fila superior de las de la inferior las anotamos:

$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$
 $\beta \gamma \delta \epsilon$

se ve que la a se puede combinar con $\beta \gamma \delta$ y ϵ dando $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$ y $a\epsilon$, la b con γ , δ y ϵ dando $b\gamma$, $b\delta$ y $b\epsilon$, la c con δ y ϵ dando $c\delta$ y $c\epsilon$ y la d sólo con ϵ dando $d\epsilon$ o sea

$a\beta a\gamma a\delta a\epsilon b\gamma b\delta b\epsilon c\delta c\epsilon d\epsilon$
 o lo que es lo mismo, volviendo a la serie

cada letra con las siguientes en la serie a b c d e y por lo tanto tienen que obtenerse las combinaciones o productos diferentes de 5 letras tomadas 2 a 2 o sea como antes hemos dicho C_5^2 .

Observemos aquí, que el mismo resultado obtendríamos tomando las barras horizontales y que por lo tanto se tiene así una demostración indirecta de que $C_5^2 = C_5^3$.

Si notamos el resultado obtenido llamado R_{2+3} al número de caminos diferentes en el rectángulo de las figuras 1 y 2 podremos condensarlo en la fórmula $R_{2+3} = C_5^2$.

Igualmente tendríamos $R_{3+2} = C_5^3$.

Haciendo iguales consideraciones en otro rectángulo con otro número diferente de mallas, llegaríamos a la misma conclusión, de modo que tendríamos como fórmula general

$$R_{p+q} = R_{q+p} = C_{p+q}^p = C_{p+q}^q$$

De todos es conocido el valor de

$$C_{p+q}^p = \frac{(p+q)(p+q-1) \dots (p+q-p+1)}{p!} = \frac{(p+q)(p+q-1) \dots (q+1)}{p!} = C_{p+q}^q = \frac{(q+p)(q+p-1) \dots (p+1)}{q!}$$

A título de ejemplo podemos poner algunos valores particulares:

$$p=1, q=1 \quad R_{1+1} = C_{1+1}^1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$p=1, q=2 \quad R_{1+2} = C_{1+2}^1 = \frac{3}{1} = 3$$

$$p=2, q=1 \quad R_{2+1} = C_{2+1}^1 = \frac{3}{1} = 3$$

$$p=2, q=2 \quad R_{2+2} = C_{2+2}^2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$p=1, q=3 \quad R_{1+3} = C_{1+3}^1 = \frac{4}{1} = 4$$

$$p=2, q=3 \quad R_{2+3} = C_{2+3}^2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Este último caso es el estudiado antes. En otro artículo veremos la aplicación de este problema a la serie de Taylor.