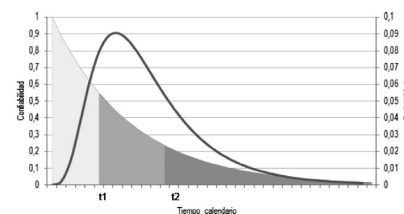


Modelado estocástico de confiabilidad para activos físicos reparables. Caso de estudio aplicado a la minería chilena

Reliability stochastic modeling for repairable physical assets. Case study applied to the Chilean mining



Pablo Viveros^{1,2}, Adolfo Crespo¹, René Tapia³, Fredy Kristjanpoller^{1,2}, Vicente González-Prida¹

¹ UNIVERSIDAD DE SEVILLA. Avda. Camino de los Descubrimientos, s/n - 41092 Sevilla. Tfno: +34 954 487215

² UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA. Av. España, 1680 - Valparaíso (Chile).

³ RELPRO Spa (Chile)

DOI: <http://dx.doi.org/10.6036/7863> | Recibido: 29/10/2015 • Aceptado: 26/04/2016

ABSTRACT

- The reliability modelling, calculating and projecting for industrial equipment and systems are today a basic and fundamental task for reliability and maintenance engineers, regardless of the nature or genetics of those industrial assets. In this paper, the stochastic models PRP, NHPP and GRP are explained in detail with the corresponding conceptual, mathematical and stochastic development. For each model, the respective conceptualization and parameterization is analysed in detail. The practical application is developed for a real case in the mining industry, which shows step by step the appropriate stochastic and mathematical development. Finally, this research becomes an analytical and explanatory procedure on the definition, calculation, methodology and criteria to be considered for industrial assets parameterization with partial or null post maintenance degradation.
- **Key Words:** Reliability, Degradation, Repairable Assets, Simulation.

RESUMEN

Modelar, calcular y proyectar la confiabilidad de equipos y sistemas industriales es una tarea básica y fundamental hoy en día para los ingenieros de confiabilidad y mantenimiento, independiente de la naturaleza o genética de estos activos industriales. En el presente artículo se explican en detalle los modelos estocásticos PRP, NHPP y GRP, con el desarrollo conceptual, matemático y estocástico según corresponda. Para cada modelo se analiza en detalle la respectiva conceptualización y parametrización. La aplicación práctica se desarrolla para un caso real en la industria minería que evidencia paso a paso el desarrollo matemático y estocástico según corresponda. Esta investigación finalmente se transforma en un procedimiento analítico y explicativo sobre la definición, metodología de cálculo y criterios que deben ser considerados para parametrizar activos industriales con degradación nula o parcial post mantenimiento.

Palabras Clave: Confiabilidad, Degradación, Activos Reparables, Simulación.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo y análisis de equipos reparables tienen gran importancia, principalmente con la finalidad de incrementar el rendimiento orientado a la confiabilidad y mantenimiento, como parte

de la reducción de costos en este último ítem. Un sistema reparable es definido como:

"Aquel sistema que, tras no haber podido realizar una o más de sus funciones de manera satisfactoria, se puede restaurar completamente su rendimiento por cualquier método que no sea el reemplazo de todo el sistema" [1].

Dependiendo del tipo de mantenimiento que se le aplique a un equipo es posible encontrarse con 5 casos [2]:

- a) Mantenimiento o reparación perfecta: Operación de mantenimiento que restaura el equipo a la condición de "tan bueno como nuevo".
- b) Mantenimiento o reparación mínima: Operación de mantenimiento que restaura el equipo a la condición de "tan malo como viejo".
- c) Mantenimiento o reparación imperfecta: Operación de mantenimiento que restaura el equipo a la condición de "peor que como nuevo pero mejor que como viejo".
- d) Mantenimiento o reparación sobre-perfecta: Operación de mantenimiento que restaura el equipo a la condición de "mejor que nuevo".
- e) Mantenimiento o reparación destructiva: Operación de mantenimiento que restaura el equipo a la condición de "peor que viejo".

Para un mantenimiento perfecto el modelo más común desarrollado corresponde al *Perfect Renewal Process* (PRP). En él se asume que la acción de reparación restaura al equipo a la condición tan bueno como nuevo, y asume que los tiempos entre fallos del equipo se encuentran idénticamente e independientemente distribuidos. Lo más comúnmente usado para modelar PRP son *procesos homogéneos de Poisson* (HPP), el cual considera que el sistema no envejece y no se deteriora, independiente del patrón previo de fallos, es decir es un proceso sin memoria. En cuanto al caso b), "tan malo como viejo", es el caso contrario a lo que ocurre con el caso a) "tan bueno como nuevo", dado que se asume que el equipo quedará post intervención de mantenimiento en el mismo estado que justo antes de cada fallo, esta consideración se fundamenta en que es un equipo complejo, compuesto por cientos de componentes, con muchos modos de fallo, y el hecho de reemplazar o reparar un determinado componente no afectará significativamente el estado y edad global del equipo. En otras palabras, el sistema está sujeto a mínimas reparaciones, lo cual no provoca cambio ni mejora considerable. El modelo más común para la representación de este caso es por medio de *procesos no-homogéneos de Poisson* (NHPP), en este caso el modelo más usado

para representar NHPP es el llamado *Power Law*, en este modelo se asume una *distribución Weibull* para el primer fallo, que luego se ve modificada en el transcurso del tiempo.

Los modelos HPP y NHPP, a pesar de ser aquellos con mayor uso, tienen una limitación práctica en cuanto a su aplicación, dado que la condición posterior a un mantenimiento más realista es la que se encuentra entre los dos extremos ya expuestos: "peor que como nuevo pero mejor que como viejo". Para buscar una generalización a esta situación, y no distinguir discretamente entre HPP y NHPP es que se crea el "Modelo Generalizado de Renovación" (*Generalized Renewal Process*; GRP) [3], el cual fija un ratio de mejora. Lamentablemente, la incorporación de esta variable complica el cálculo analítico de los parámetros y ajustes respectivo de probabilidad, por lo cual su aplicabilidad en términos matemáticos exactos es compleja. Para ello, se han considerado soluciones obtenidas por medio de *simulación de Monte Carlo* (MC), siendo uno de los métodos más validados de acuerdo a la propuesta desarrollada por el autor Krivstov [4], donde se generan series de tiempo de buen funcionamiento por medio del uso de la función inversa de la función de distribución de probabilidad (f.d.p.), que tiene como base una variable uniforme y evidentemente aleatoria.

Entendiendo la importancia y aplicabilidad de los modelos PRP, NHPP y GRP, este artículo presenta el desarrollo conceptual, matemático y estocástico para cada uno de los modelos presentados y explicados brevemente en los párrafos anteriores. Cada modelo se explica y desarrolla en ejes: conceptualización y parametrización. Además, se presenta una aplicación real, que corresponde a 2 bombas de pulpa (agua, concentrado de cobre y material inerte) utilizadas en la industria minera de Chile, las cuales sufren diferentes niveles de desgaste debido a la intensidad de uso, altura geográfica y por supuesto a causa del tipo de mantenimiento que se le desarrolla durante su vida útil, sea este de carácter planificado o bien fallos aleatorios.

Con todo lo anterior, el presente artículo comienza introduciendo los modelos estocásticos (PRP, NHPP y GRP) para, una vez parametrizados, pasar a continuación a realizar un análisis numérico de aplicación. Finalmente, el artículo concluye resumiendo

las líneas principales aportadas por el artículo y su aplicación al ámbito industrial. Cabe destacar la aportación innovadora de este artículo consistente en la aplicabilidad de herramientas informáticas en la resolución de modelos ya existentes. Tal aplicabilidad se presenta aquí a modo de muestra, a un caso específico de la minería chilena.

Con ánimo de resaltar la aportación científico-técnica del presente artículo es menester subrayar en esta introducción las siguientes consideraciones: La amplia gama y variabilidad de comportamiento de los mismos, exige la aplicación de técnicas, de diversa complejidad y profundidad, que permitan adaptarse de la mejor manera a cada una de las realidades. La variable que define y condiciona la utilización de las técnicas, es el estado en el cuál quedan los activos luego de una reparación. En este sentido, son cinco las clasificaciones de la reparación: perfecta, mínima, imperfecta, sobre-perfecta y destructiva. Para un mantenimiento perfecto, se utiliza y recomienda el modelo *Perfect Renewal Process* (PRP) a través de *procesos homogéneos de Poisson* (HPP). En el caso de una reparación mínima, generalmente se representa por medio de *procesos no-homogéneos de Poisson* (NHPP), siendo el modelo más utilizado el *Power Law*. No obstante la gran aplicación de los modelos antes señalados, existen variadas situaciones que no quedan cubiertas, dado que la generalidad de los casos de reparación está entre la perfecta y la mínima. Para estas situaciones, se enuncia y desarrolla el "*Modelo Generalizado de Renovación*" (*Generalized Renewal Process*; GRP).

Además, como la probabilidad de encontrar los valores que otorguen el máximo global de la función de máxima verosimilitud es prácticamente nula por medio de la búsqueda aleatoria, es necesario definir un valor de tolerancia para las derivadas parciales ($\partial L/\partial B$ y $\partial L/\partial q$) que son igualadas a cero, fijándose este valor de tolerancia "TOL" como un rango aceptable para considerar el ajuste de distribución. Es por este motivo, que las técnicas de simulación, y es especial la de Montecarlo, surgen como alternativas poderosas para su resolución. A parte del presente artículo, otros estudios que razonan los distintos modelos describiendo las diferentes ventajas y defectos se encuentran las referencias [5] a [12].

Notación	
PRP:	Perfect Renewall Process – Proceso de Renovación Perfecta
NHPP:	Non-Homogeneous Poisson Process – Proceso no homogéneo de Poisson
GRP:	Generalized Renewal Process – Proceso generalizado de renovación
$\lambda_i(t)$:	Tasa de fallo de un elemento en un tiempo dado t .
t_i :	El tiempo de funcionamiento entre la fallo $i-1$ y la i -ésima
$f(t)$:	Función de densidad de probabilidad de fallo (f.d.p) de un elemento al tiempo t de operación.
$F(t)$:	Función de densidad de probabilidad acumulada de fallo de un elemento al tiempo t de operación.
$\Gamma(\cdot)$:	Función gamma.
$f(t;\theta)$:	Función de densidad de probabilidad de fallo de un elemento al tiempo t de operación, con parámetros de forma y escala dadas por el vector θ .
$L(\theta)$	Función de verosimilitud para el vector de parámetros θ en una f.d.p. dada.
MTTF:	Tiempo promedio para fallar
MTTR:	Tiempo promedio de reparación
$\hat{a}$:	Valor estimado del parámetro a , símil aplicable para todos los parámetros.
A_n :	Edad virtual del sistema al instante inmediato de realizada la n -ésima reparación.
T_n :	Edad real (de operación) al instante inmediato de realizada la n -ésima reparación.
q :	Parámetro que determina la imperfección de la reparación.
TOL:	Rango numérico para considerar aceptable un ajuste de distribución por medio de Máxima Verosimilitud.
TQ:	Tolerancia corresponde al porcentaje superior e inferior de las posibilidades que tiene el valor q .

Tabla. 1. Notación

2. PRESENTACIÓN DE MODELOS ESTOCÁSTICOS

2.1. PROCESO DE RENOVACIÓN PERFECTA (PRP)

Conceptualización PRP

El modelo del proceso de renovación perfecta describe la situación en la cual un sistema reparable se restaura a un estado "tan bueno como nuevo", y los tiempos entre fallos de un equipo se consideran independientes e idénticamente distribuidos. Este proceso asume que el equipo se restaura a una condición idéntica a la original, o bien es un reemplazo. La gráfica de la tasa de fallo en función del tiempo total transcurrido, para un equipo con tasa de fallo creciente, considerando el caso general de una distribución Weibull, sería el mostrado en la Figura 1.

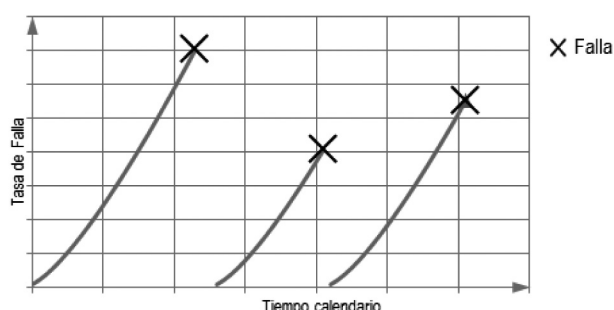


Figura 1: Tasa de fallo $\lambda(t)$ en PRP (Fuente: Elaboración propia)

Como es posible evidenciar en el gráfico previo, la evolución de la tasa de fallo se resetea luego de cada fallo, evidentemente debido a la consideración de que el equipo ha quedado en condiciones perfectas. El modelo PRP posee principal aplicación sobre aquellos equipos que tengan un mantenimiento completo sobre todos sus componentes, o bien se trata de un remplazo 100% del equipo.

En términos matemáticos: Sea t_i el tiempo de funcionamiento entre la fallo $i-1$ y la i -ésima, luego, bajo un modelo PRP cualquier tiempo t_i obedecerá a la misma distribución de probabilidad con parámetros inalterables en el tiempo, por ejemplo para el caso de Weibull con 2 parámetros:

$$f(t_i) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Siendo α y β constantes e inalterables en el tiempo. El origen de este tipo de distribución es con la finalidad de considerar tasas de fallo creciente o decreciente a lo largo del tiempo desde la última reparación. Siendo α y β , los parámetros de escala y forma respectivamente.

Parametrización modelo PRP –Weibull 2 parámetros

Desde el punto de vista práctico, se caracteriza por tener 2 parámetros, donde β corresponde al parámetro de forma vinculado a la conocida curva de la bañera y a la respectiva etapa del ciclo de vida del activo, y el parámetro α conocido como el parámetro de escala, el cual se vincula directamente con la variabilidad y dispersión de los datos de vida que tiene el activo en análisis. La función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de fallo corresponde a (1):

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \quad (1)$$

En este caso la tasa de fallo es definida como (2):

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \quad (2)$$

El tiempo medio para fallar (MTTF) y confiabilidad $R(t)$ correspondientemente son (3):

$$MTTF = \alpha \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right), \quad R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \quad (3)$$

Nótese que $\Gamma(\cdot)$ corresponde a la función gamma (4):

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (4)$$

La función Weibull por si misma constituye una generalización para la función exponencial ya que para valores de $\beta=1$ se tiene que $\alpha=1/\lambda$ y un $\gamma=0$. El ajuste por medio de la distribución Weibull permite representar el estado de un equipo en cualquiera de las 3 fases de la curva de la bañera, ya sea de rodaje, vida útil o desgaste, por medio del ajuste del parámetro β , que actúa como factor al tiempo t en la función de la tasa de fallo. Para la parametrización, resolviendo la función de máxima verosimilitud al que se aplica logaritmo natural, se deriva parcialmente con respecto a cada parámetro y se iguala a cero, resulta (5) y (6):

$$\alpha = \left(\frac{-\sum_{i=1}^n [t_i^\beta]}{n} \right)^{1/\beta} \quad (5)$$

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n [\ln[t_i]] = \left(\frac{n \sum_{i=1}^n [t_i^\beta \ln(t_i)]}{\sum_{i=1}^n [t_i^\beta]} \right) \quad (6)$$

Para la resolución de este tipo de ajuste existen diversos softwares especializados, uno de estos es el software RelPro® [14] el cual dispone de algoritmos avanzados y eficientes para la resolución de este tipo de problemas. Asimismo, en caso de necesidad de aclarar y ampliar los conceptos que se maneja aquí, se recomiendan las referencias [15] y [16].

2.2. PROCESO NO HOMOGÉNEO DE POISSON (NHPP)

Conceptualización NHPP

NHPP es un proceso de Poisson con un modelo paramétrico usado para representar eventos con una ocurrencia de fallo evolutiva en el tiempo y siempre con una misma tendencia.

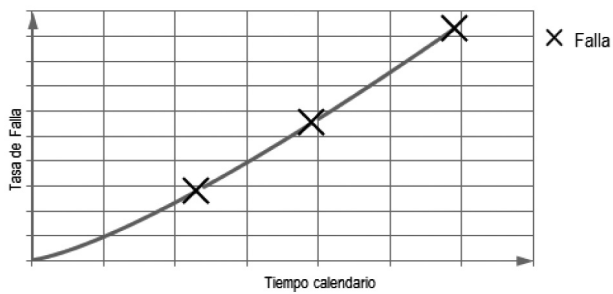


Figura 2: Tasa de fallo $\lambda(t)$ en NHPP (Fuente: Elaboración propia)

Este caso aplica especialmente para aquellos equipos que están compuestos por muchos componentes donde el remplazo de uno no afecta la confiabilidad global: considérese un equipo compuesto por cientos de componentes que trabajan en serie, si uno falla este componente se reemplaza y el equipo continua trabajando pero con un nivel de desgaste casi idéntico al anterior. Por esta razón el modelado NHPP aplica para los denominados "mantenimientos mínimos". En la Figura 2 se representa la gráfica del comportamiento de la tasa de fallo en el tiempo, siendo está completamente acumulativa entre una y otra fallo. Como es posible apreciar en la gráfica anterior, para el caso de NHPP, la tasa de fallo queda dependiente del tiempo total transcurrido. En el caso de NHPP, las funciones de confiabilidad y probabilidad de fallo se comportan según lo indicado en la Figura 3.

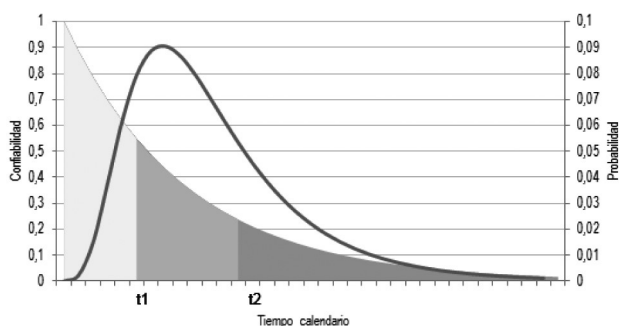


Figura 3: $R(t)$ y $f(t)$ en NHPP (Fuente: Elaboración propia)

Teniendo como base el gráfico anterior, considérese un equipo que experimenta un fallo a un tiempo t_1 , luego de ser reparado se reanuda su funcionamiento y comienza a operar en ese mismo punto. Luego, la función de confiabilidad a partir de t_1 , para un tiempo t que representa el tiempo transcurrido más allá de t_1 , estará dada por (7):

$$R(t | t > t_1) = \frac{R(t)}{R(t_1)} = 1 - F(t | t > t_1) \quad (7)$$

Esto es denominado por varios autores [16] como *Mission Time*, donde t corresponde al tiempo calendario transcurrido. Para una distribución Weibull, a partir de la ecuación anterior, y dado que t_{i-1} corresponde al tiempo total transcurrido hasta el último fallo y t_i el tiempo total (calendario) transcurrido luego de que se genera el i -ésimo fallo, es posible concluir la siguiente f.d.p. (8):

$$f(t_i | t_i > t_{i-1}) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i-1}}{\alpha} \right)^{\beta} - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{\beta} \right\} \quad (8)$$

Parametrización NHPP – Weibull 2 parámetros

Para obtener los parámetros α y β , la regresión lineal no es una opción, y lo ideal es hacer el ajuste por Máxima Verosimilitud. La función de verosimilitud se expresa como (9):

$$P(x_i \text{ en } [x_i, x_i + dx] \forall i \in \{1, \dots, n\}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (9)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Donde θ corresponde al vector de los parámetros de la distribución a la cual obedece la $f(t)$. Además x_i corresponde al elemento i -ésimo de la muestra que se tiene. Como se desea tener máxima verosimilitud entre los datos y una f.d.p: $f(t, \theta)$, se ajustan los valores del vector θ con el objetivo de cumplir ese máximo. Conceptualmente, se buscan los parámetros que mejor se ajustan a una muestra $X_1, \dots, X_n$ de forma tal que la probabilidad de la serie de valores que se presenten en un muestreo aleatorio sea máxima.

De esta forma, para el presente caso, con la función de verosimilitud simplificada y tras aplicar derivadas parciales e igualar a cero, el resultado de los estimadores para NHPP son los siguientes (10), (11):

$$\hat{\alpha} = \frac{t_n}{n^{1/\beta}} \quad (10)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(\frac{t_n}{t_i} \right)} \quad (11)$$

Donde t_i corresponde al tiempo transcurrido hasta el i -ésimo fallo y t_n el tiempo transcurrido hasta el último fallo. Al igual que en el caso anterior, en caso de necesidad de aclarar y ampliar los conceptos que se maneja aquí, se recomiendan las referencias [15] y [16].

2.3. PROCESO GENERALIZADO DE RENOVACIÓN (GRP)

Conceptualización GRP

Los modelos tradicionales ya presentados solo son capaces de modelar 2 tipos de mantenimiento: el completamente perfecto y el completamente imperfecto. El modelo GRP es la generalización para el cualquier nivel de perfección que tenga el mantenimiento, incluyendo los extremos evidentemente. GRP integra un nuevo parámetro A_n , denominado "edad virtual". El parámetro A_n representa la edad del sistema al instante inmediato de realizada la n -ésima reparación. De este modo si $A_n = y$ el elemento tiene un tiempo

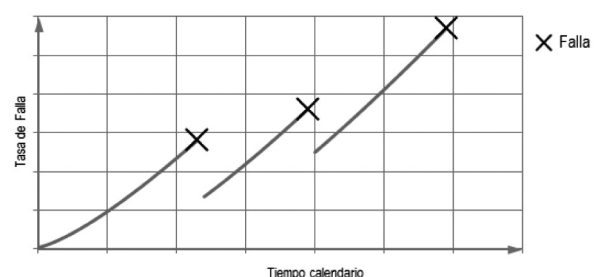


Figura 4: Tasa de fallo $\lambda(t)$ en GRP (Fuente: Elaboración propia)

de funcionamiento asociado a una distribución de probabilidad condicionada por esta edad y . Es decir, todos los tiempos de fallo tienen distribuciones de probabilidad diferentes en la medida que transcurre el tiempo. Gráficamente la tasa de fallo evoluciona según se muestra en la Figura 4.

La forma de incorporar esta variable es considerando que el equipo comienza a operar con cierto desgaste, esto se refleja en la función de confiabilidad. Así la función de distribución de probabilidad acumulada y confiabilidad para t_{n+1} es (12):

$$F(t | A_n = y) = \frac{F(t + y) - F(y)}{1 - F(y)} \quad (12)$$

$$R(t | A_n = y) = \frac{R(t + y)}{R(y)}$$

De esta forma, queda claro que esta "edad virtual" es la edad de desgaste a la cual comienza a funcionar nuevamente el equipo. La función de confiabilidad queda similar al "Mission Time", solo que ya no corresponde a un tiempo real transcurrido, sino que a un equivalente. Sea x_i el i -ésimo tiempo de buen funcionamiento del equipo, y T_n el tiempo total acumulado transcurrido hasta el n -ésimo fallo. Es decir (13):

$$T_n = \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

Por otra parte, el parámetro A_n está dado por (14):

$$A_n = A_{n-1} + q \cdot x_n \quad (14)$$

Usando (13) queda (15):

$$A_n = qT_n = q \sum_{i=1}^n x_i \quad (15)$$

Donde q es el parámetro que determina la ineffectividad de la reparación, de este modo $q=0$ implica $A_n=0$, es decir, edad virtual igual a cero. Por lo tanto $q=0$ corresponde a un caso de reparación perfecta, es decir completamente efectivo. En caso de que fuera $q=1$, entonces comienza a operar en la misma parte de la función de confiabilidad donde el equipo falló. Esto sería (16):

$0 < q < 1$: GRP

$q = 0$: PRP (HPP)

$q = 1$: NHPP

(16)

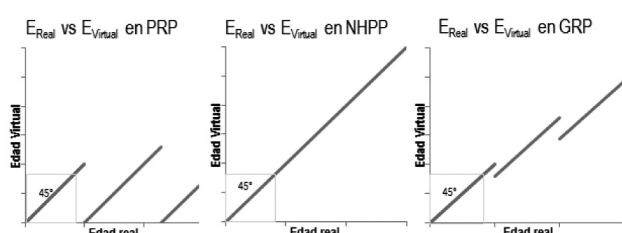


Figura 5: Edad virtual V/S edad real en modelos PRP, NHPP y GRP (Fuente: Elaboración propia)

Graficando la relación existente entre la vida real y la edad virtual que evoluciona, es posible generar, como se muestra en la Figura 5, la gráfica comparativa para PRP, NHPP y GRP.

Al igual que en NHPP se determina la confiabilidad condicionada y la respectiva f.d.p. Entonces, la confiabilidad se modela según (17), (18) y (19):

$$R(t_i | t_i > q \cdot t_{i-1}) = \frac{e^{-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta}} \quad (17)$$

$$F(t_i | t_i > q \cdot t_{i-1}) = 1 - e^{-\left(\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} \quad (18)$$

$$f(t_i | t_i > q \cdot t_{i-1}) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} \quad (19)$$

Parametrización GRP

El ajuste desarrollado es en base a la f.d.p Weibull de 2 parámetros (α , β), y si se agrega el parámetro q entonces se tendría un total de 3 parámetros a determinar. La estimación más común de los parámetros, corresponde por Máxima Verosimilitud, a la expresión de Función de verosimilitud a la cual, la derivada parcial en cada variable se obtiene un set de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, estas últimas son: α , β , q . Estas α , β , q son los 3 parámetros a identificar. Realizar una búsqueda de estos parámetros es un procedimiento sumamente exhaustivo, y dado que se requiere de precisión en el procedimiento, generalmente es un proceso extenso, por lo que se propone utilizar la herramienta de simulación de Montecarlo. La búsqueda de α , β , q comienza con la simulación de q y β , iterados por distribuciones uniformes (20):

$$q \sim U[0,1]$$

$$\beta \sim U[0,10] \quad (20)$$

El parámetro q solo puede estar entre 0 y 1, y el parámetro de forma β difícilmente excede el valor 10 [13]. Por su parte el valor de α tiene un rango de posibilidades mucho más amplio, por esto se usa la siguiente ecuación que permite expresar α a partir de q y β . De forma similar, el estimado para el modelo GRP queda (21):

$$\hat{\alpha} = \sqrt[n]{\sum_{i=2}^n \left[\left(t_i + t_{i-1}(q-1) \right)^\beta - (q \cdot t_{i-1})^\beta \right] + t_1^\beta} \quad (21)$$

Luego el procedimiento para el ajuste GRP, se presenta por medio del siguiente diagrama de proceso en la Figura 6.

Dado que la probabilidad de encontrar los valores que otorguen el máximo global de la función de máxima verosimilitud es prácticamente nula por medio de la búsqueda aleatoria, es necesario definir un valor de tolerancia para las derivadas parciales

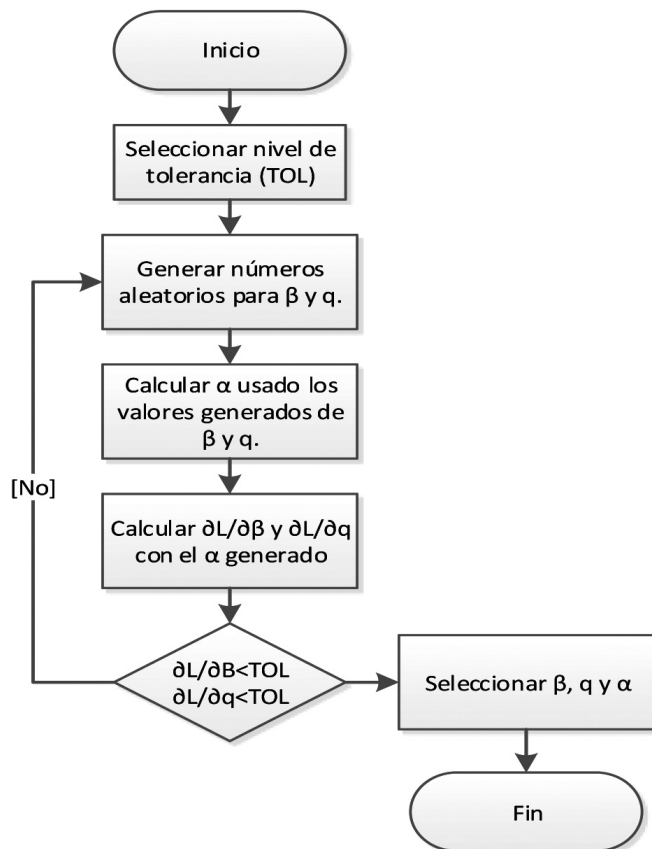


Figura 6: Diagrama de proceso en ajuste GRP (Fuente: Elaboración propia)

$(\partial L/\partial \beta$ y $\partial L/\partial q)$ igualadas a cero, siendo necesario fijar este valor de tolerancia "TOL" como un rango aceptable para considerar que se encuentra en un máximo global y de esta forma aceptar el respectivo ajuste de distribución. Al considerar la integración de un nuevo parámetro, en este caso q , siempre el ajuste GRP entregará una mayor verosimilitud que un ajuste PRP o NHPP, pero para considerar la existencia y aplicabilidad de estos casos es necesario contar con un criterio de selección. Este se aplica luego de realizar el ajuste por medio de GRP, una vez ya se haya obtenido el parámetro q .

Dado a que el valor q a obtener siempre será un valor continuo, la probabilidad de que sea exactamente $q=1$ o $q=0$ es prácticamente nula, por lo tanto se considera un nuevo nivel de tolerancia, que se ha denominado TQ . Este nivel de tolerancia corresponde al porcentaje superior e inferior de las posibilidades que tiene el valor q . Este valor tiene por finalidad identificar cuando sería más apropiado considerar un modelamiento PRP o un modelamiento NHPP. Por lo tanto la expresión práctica corresponde a (22):

$$\begin{aligned}
 0 + TQ < q < 1 - TQ & : \text{GRP} \\
 q \leq TQ & : \text{PRP} \\
 q \geq 1 - TQ & : \text{NHPP}
 \end{aligned}
 \quad (22)$$

Como en los casos anteriores, para aclarar y ampliar los conceptos que se maneja aquí, se recomiendan las referencias [15] y [16].

3. APLICACIÓN NUMÉRICA

De acuerdo al desarrollo conceptual y analítico previo, se procede a desarrollar una aplicación práctica, la cual corresponde al

N° de Fallo	Tiempo entre fallos [h]	N° de Fallo	Tiempo entre fallos [h]
1	860,05	13	367,41
2	1608,24	14	2757,98
3	1134,24	15	355,50
4	2703,12	16	1084,39
5	645,38	17	855,52
6	95,15	18	280,52
7	1278,48	19	490,48
8	605,34	20	945,55
9	344,33	21	105,32
10	1054,68	22	127,33
11	680,57	23	61,85
12	405,38	24	326,30

Tabla. 2. Tiempo entre fallos de la bomba P01 en horas. (Fuente: Elaboración propia)

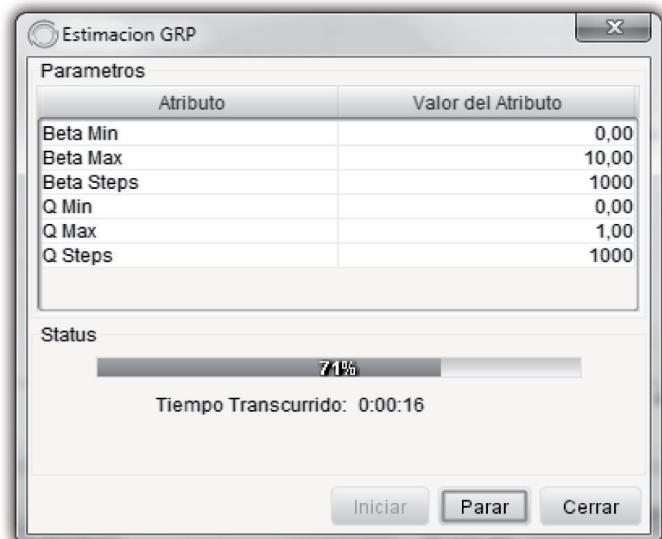


Figura 7: Proceso de ajuste GRP, Software RelPro®. (Fuente: Elaboración propia)



Figura 8: Estimación de parámetros ajuste GRP, Software RelPro®. (Fuente: Elaboración propia)

análisis de una bomba de pulpa (material inerte), código identificador P01, que participa en un proceso de minería de cobre. El modelo a aplicar corresponde al GRP, dada la flexibilidad y capacidad de generalizar y discriminar cualquiera de los 3 modelos expuestos PRP, NHPP y GRP. En la Tabla 2 se muestran los registros de tiempos de buen funcionamiento los cuales han sido recogidos por la propia entidad que realiza la actividad industrial, y que servirán como datos de partida para la simulación. Asimismo, cabe indicar que, es posible emplear un sistema más complejo, a fin de observar la aplicabilidad de la metodología presentada y sus efectos, es suficiente el elemento seleccionado. Entonces, se procede a desarrollar el respectivo ajuste de distribución de probabilidad.

Paso 1: Nivel de Tolerancia

Se define el nivel de tolerancia para las derivadas parciales como $TOL = 0.01$, y la tolerancia para el valor q es de $TQ = 5\%$.

Paso 2: Ajuste de Distribución

Una vez definido el nivel de tolerancia, se procede al ajuste GRP respectivo. Para esto se decide utilizar la herramienta informática *RelPro*®, la cual ha sido desarrollada a partir de diversas investigaciones científicas y aplicadas en la industria. Resolviendo las ecuaciones por medio del software *RelPro*® se obtienen los siguientes parámetros. Ver las Figuras 7 y 8 respectivamente.

A partir de los parámetros obtenidos ($\alpha = 1986,067$; $\beta = 2,026$ y $q = 0,192$), se resuelven las derivadas parciales y se verifica la aceptación del ajuste de distribución GRP y nivel de tolerancia apropiado (23).

$$\left| \frac{\partial[\ln(L)]}{\partial \beta} \right| = 1,76 \times 10^{-7} < TOL = 0,01$$

$$\left| \frac{\partial[\ln(L)]}{\partial q} \right| = 0,009833 < TOL = 0,01 \quad (23)$$

Respecto al valor q , se tiene que (24):

$$TQ = 0,05 < q = 0,192 < 1 - TQ = 0,95 \quad (24)$$

Por lo tanto, al determinar una solución de ajuste por máxima verosimilitud con derivadas parciales aceptables que garanticen la calidad del ajuste, y un parámetro q con un valor numérico entre el rango $0,05 < q < 0,95$, es posible señalar que el uso del modelo de ajuste GRP es apropiado para el caso, y por consecuencia, la utilización de un ajuste tradicional sería completamente incorrecto.

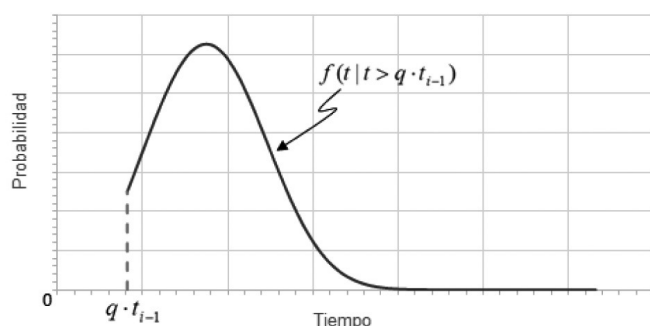


Figura 9: F.d.p. de modelo GRP para tiempo transcurrido t_{i-1} Software *RelPro*®. (Fuente: Elaboración propia)

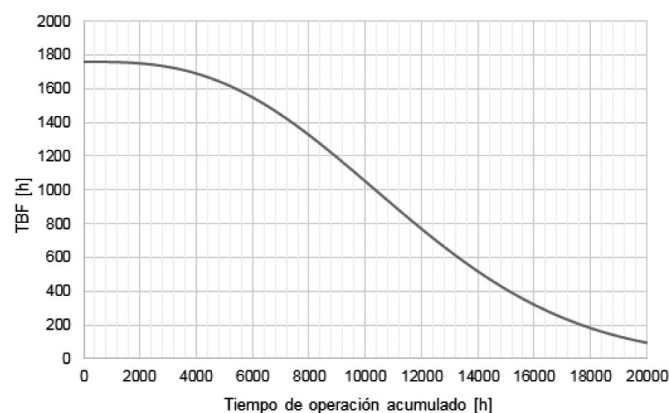


Figura 10: TBF esperada según el tiempo de operación transcurrido hasta la última intervención. Software *RelPro*®. (Fuente: Elaboración propia)

Paso 3: Análisis

Con este resultado, uno de los posibles análisis es proyectar correctamente los fallos del equipo, e indirectamente la tasa de aumento de la frecuencia de fallo y la disminución de los tiempos de buen funcionamiento del equipo en análisis.

El tiempo esperado de buen funcionamiento, al instante previo en que se reanuda la operación de un equipo, se determina por la diferencia entre la esperanza de la f.d.p., la que está en función del tiempo total transcurrido, y la edad virtual del equipo. Gráficamente se tienen las Figuras 9 y 10 respectivamente.

Para hacer una estimación del número de fallos acumulados a lo largo del tiempo, es posible considerar que el primer fallo ocurre al MTBF esperado al inicio de la operación del equipo, de este modo es posible proyectar recursivamente con el MTBF esperado luego de cada ocurrencia de fallo. Obviamente, esto es una generalización dado que no siempre es sucede esta circunstancia y, es habitual que el primer fallo no coincida necesariamente con el MTBF. Finalmente, es posible obtener el gráfico de número de eventos acumulados para un tiempo total de operación. Ver Figura 11 con el comportamiento acumulado de fallos v/s tiempo total de operación. Claramente se identifica un comportamiento ascendente y acelerado de fallos en un tiempo de operación menor. Esto se entiende como envejecimiento del activo en el tiempo. Analíticamente (25) a (30):

$$E[t_i | t_i > q \cdot t_{i-1}] = \int_{q \cdot t_{i-1}}^{\infty} (f(t | t > q \cdot t_{i-1}) \times t) dt \quad (25)$$

$$MTBF(t_{i-1}) = E[t_i | t_i > q \cdot t_{i-1}] - q \cdot t_{i-1} \quad (26)$$

$$MTBF(t_{i-1}) = \int_{q \cdot t_{i-1}}^{\infty} (f(t | t > q \cdot t_{i-1}) \times t) dt - q \cdot t_{i-1} \quad (27)$$

$$MTBF(t_{i-1}) = \int_{q \cdot t_{i-1}}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{\left(\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha} \right)^{\beta} - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right)} \times t \right) dt - q \cdot t_{i-1} \quad (28)$$

$$MTBF(t_{i-1}) = e^{\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}} \times \int_{q \cdot t_{i-1}}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right)} \times t\right) dt - q \cdot t_{i-1} \quad (29)$$

$$s - 1 = \frac{1}{\beta} \Rightarrow s = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$MTBF(t_{i-1}) = \alpha \times e^{\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}} \times \underbrace{\int_{\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}}^{\infty} (e^{-p} \times p^{s-1}) dp}_{\Gamma\left(s, \left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}\right)} - q \cdot t_{i-1} \quad (30)$$

$$MTBF(t_{i-1}) = e^{\left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}} \alpha \times \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1, \left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}\right) - q \cdot t_{i-1}$$

$$MTBF(t_{i-1}) = \frac{\alpha \times \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1, \left(\frac{q \cdot t_{i-1}}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{R(t_{i-1})} - q \cdot t_{i-1}$$

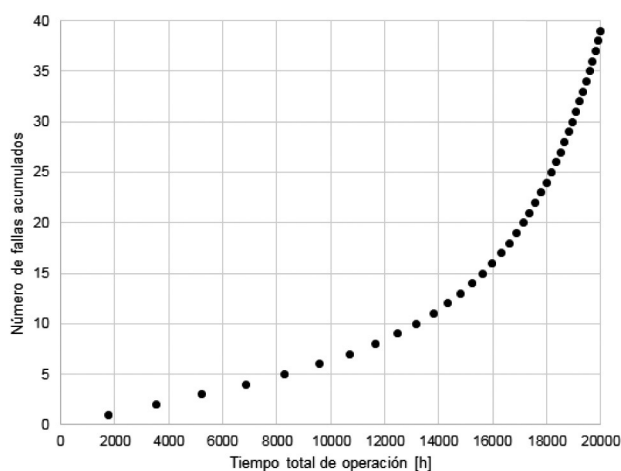


Figura 11: Pronóstico de Número de Fallos Software RelPro®. (Fuente: Elaboración propia)

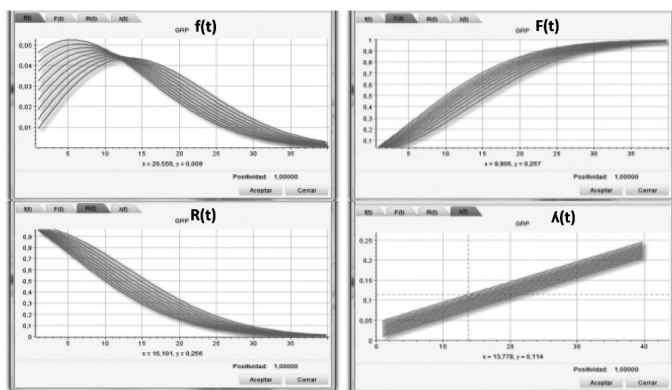


Figura 12: Curvas $f(t)$, $F(t)$, $R(t)$ y $\lambda(t)$, Software RelPro®.

Además, la herramienta informática RelPro® utilizada permite diagramar la evolución en el tiempo de las curvas de: función de densidad de probabilidad $f(t)$, la función acumulada de probabilidad $F(t)$, confiabilidad $R(t)$ y la tasa de fallo $\lambda(t)$ (Figura 12).

Por defecto, RelPro® diagrama las curvas a las cuales se verá sometido el elemento luego de los próximos nueve eventos (criterio interno), considerando que los próximos fallos ocurren una vez transcurrido un tiempo equivalente al MTBF correspondiente a su última curva de confiabilidad antes del fallo. De este modo es posible notar qué tan rápido se degrada el elemento con el transcurso de la ocurrencia de fallos. Analizando las curvas de la figura 12, se aprecia el decaimiento de la curva de confiabilidad luego de la ocurrencia de fallos, del mismo modo es posible notar que la curva de densidad de probabilidad incrementa su densidad acercándose a valores cada vez más cercanos al origen. En cuanto a la tasa de fallo, es posible notar que luego de cada fallo esta incrementa en intervalos similares.

4. FUTURAS LÍNEAS DE APLICACIÓN

La presente metodología está enfocada hacia su aplicación práctica, por lo que posteriores investigaciones podrán enfocarse en diferentes ejemplos de aplicación sobre diferentes tipologías de máquinas (empleadas en la minería o en otro sector). En tales aplicaciones posteriores, puede resultar interesante especificar las condiciones de utilización de la maquinaria (en el ejemplo del presente artículo, una bomba e idénticamente para otras máquinas que acompañen al elemento principal), mantenimiento que se efectúa, tiempo operativo total, tiempo de utilización diario, condiciones ambientales o de proceso, etc. Con ello, es posible realizar comparaciones de los resultados obtenidos tanto para los diferentes tipos de maquinaria como para diferentes condiciones de contorno.

En la sección 2 se ha realizado una descripción exhaustiva de los modelos estocásticos que, posteriormente, se ha puesto en práctica en la sección 3 con un ejemplo concreto de aplicación a una bomba. Por ello, y a la vista de estos desarrollos, futuras investigaciones podrán enfocarse más en una mayor caracterización del tipo de industria y de las máquinas que emplea.

5. CONCLUSIONES

El modelado de confiabilidad es un aspecto fundamental para la gestión y optimización de los activos físicos industriales.

Aprender detalladamente el paso a paso de cada modelo es una tarea fundamental para aplicar efectiva y correctamente cada modelo. Diversas investigaciones omiten el proceso de resolución y solo presentan resultados finales indicando el uso del modelo y el uso de alguna herramienta informática con algoritmos integrados. Esto se evidenció en diferentes investigaciones, lo cual motivó al equipo investigador a desarrollar una pauta específica conceptual y práctica de resolución para cada modelo paramétrico estocástico antes mencionado. Esto es fundamental para reconocer el valor de este trabajo y su aporte a futuros investigadores que deseen aprender y aplicar estos conocimientos. Es por esta razón, que esta investigación se transforma un procedimiento analítico y explicativo sobre la definición, metodología de cálculo y criterios que deben ser considerados para parametrizar activos industriales bajo cierto nivel de degradación post mantenimiento, complementando además su análisis con una aplicación numérica que permite evidenciar paso a paso el desarrollo matemático y estocástico según corresponda. La aplicación práctica seleccionada fue desarrollada en la industria minera de Chile. Cabe destacar aquí la frecuente falta de realimentación entre los usuarios y los fabricantes de los equipos, lo que se traduce en desconocimiento por parte de los constructores de los puntos débiles reales de las

máquinas. No son iguales los resultados obtenidos en las pruebas, que los que se obtienen en condiciones de trabajo reales. A veces las diferencias son sustanciales.

Como segunda fase de esta investigación para una potencial publicación, el equipo investigador está analizando una clasificación previa a la parametrización respectiva que presenta el actual artículo, la que corresponde a la identificación si el modelo es o no paramétrico. Que el método sea paramétrico (MP) quiere decir que su modelación se ajusta a alguna función de distribución de probabilidades conocida, por otro lado, si no se puede realizar esta suposición, el método es no paramétrico (MNP). Además existen modelos que contienen una parte de la función paramétrica y otra que no, estos son los métodos semi-paramétricos (MSP). Esta última clasificación (MSP) es de gran interés de investigación y aplicación, ya que en la práctica generalmente los activos están sometidos a diversas variables que los modelos clásicos no incluyen en la modelación y análisis de tasa de fallo, por ejemplo: temperatura de operación, carga de trabajo, diagnóstico de lubricantes (partículas por millón), etc. Estas variables no son constantes y pueden provocar cambios en la confiabilidad de un componente, lo que hace necesario analizar y cuantificar los efectos diseñando entonces una política de mantenimiento eficaz y eficiente. Además, se espera incorporar en el análisis el modelo TRP (Trend-Renewal-Process) [18], descrito y estudiado en detalle en Lindqvist, Elvebakk y Heggland [19], siendo este un modelo diferente de reparación imperfecta, con características similares al NHPP.

Los métodos modernos permiten el modelado en base a estos factores de ambiente y de estrés, pero son acotados a suposiciones o restricciones respecto a la cantidad de factores a analizar, lo cual hace más compleja su aplicación y, evidentemente, su sistemática de utilización en los análisis de confiabilidad.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ascher, H., & Feingold, H. (1984). *Repairable systems reliability: modeling, inference, misconceptions and their causes*. New York, NY: Marcel Dekker.
- [2] Veber, B., Nagode, M., & Fajdiga, M. (2008). Generalized renewal process for repairable systems based on finite Weibull mixture. *Reliability Engineering and System Safety*, 93, pp. 1461-1472. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ress.2007.10.003>.
- [3] Kijima, M., & Sumita, N. (1986). A useful generalization of renewal theory: counting process governed by non-negative markovian increments. *Journal Applied Probability*, 23, pp. 71-88. doi: <http://dx.doi.org/10.2307/3214117>.
- [4] Krivtsov, V. (2000). Monte Carlo approach to modeling and estimation of the generalized renewal process in repairable system reliability analysis, Ph.D dissertation, University of Maryland.
- [5] Muhammad, M., Abd Majid, M. A., & Ibrahim, N. A. (2009). A case study of reliability assessment for centrifugal pumps in a petrochemical plant. In: 4th World Congress on Engineering Asset Management, Athens. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-85729-320-6_44.
- [6] Wang, P., & Coit, D. W. (2005). Repairable systems reliability trend tests and evaluation. *Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 20, pp. 416-421.
- [7] Kumar, U., & Klefsjö, B. (1992). Reliability analysis of hydraulic systems of LHD machines using the power law process model. *Reliability and Engineering and System Safety*, 35, pp. 217-224. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0951-8320\(92\)90080-5](http://dx.doi.org/10.1016/0951-8320(92)90080-5).
- [8] Lopera, C. M., & Manotas, E. C. (2011). Aplicación del análisis de datos recurrentes sobre interruptores FL245 en Interconexión Eléctrica. *S.A. Revista Colombiana de Estadística*, 34(2), pp. 249-266.
- [9] Weckman, G. R., Shell, R. L., & Marvel, J. H. (2001). Modeling the reliability of repairable systems in aviation industry. *Computers and Industrial Engineering*, 40, pp. 51-63. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352\(00\)00063-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0360-8352(00)00063-2).
- [10] Mettas, A., & Zhao, W. (2005). Modeling and analysis of repairable system with general repair. *IEEE Proceedings annual Reliability and Maintainability Symposium*. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/RAMS.2005.1408358>.
- [11] Damaso, V. C., & Garcia, P. A. (2009). Testing and preventive maintenance scheduling optimization for aging systems modeled by generalized renewal process. *Pesqui. Oper. Vol.29 (3)*, pp. 563-576. <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-74382009000300006>.
- [12] Malaiya, Y. K., Li, M. N., Bieman, J. M., & Karcich, R. (2002). Software reliability growth with test coverage. *IEEE Trans. Rel.*, 51, pp. 420-426. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/TR.2002.804489>.
- [13] Yanez, M., Joglar, F., & Modarres, M. (2002). Generalized renewal process for analysis of repairable system with limited failure experience. *Reliability Engineering & System Safety*, 77, pp. 167-180. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0951-8320\(02\)00044-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0951-8320(02)00044-3).
- [14] RelPro®, Reliability and Production, Analysis and Simulation. (2014). RelPro SpA. Retrieved April 10, 2014. <http://www.relpro.pro>
- [15] Selivanov, A. I., & Yudkevich, E. (1972). *Fundamentos de la teoría de envejecimiento de la maquinaria*.
- [16] Sotskov, B. (1972). *Fundamentos de la teoría y del cálculo de Fiabilidad*. Mir.
- [17] Bebbington, M., Chin-Diew, L., & Zitikis, R. (2009). Balancing burn-in and mission times in environments with catastrophic and repairable failures. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(8), pp. 1314-1321. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ress.2009.02.015>.
- [18] Maria Luz Gámiz, Bo Henry Lindqvist. (2015). Nonparametric estimation in trend-renewal processes. *Reliability Engineering & System Safety*. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ress.2015.08.015>
- [19] B.H. Lindqvist, G. Elvebakk, K. Heggland. The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems. *Technometrics*2003; 45:31-44.